А. М. Бикчентаев

Казань, Airat.Bikchentaev@ksu.ru

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПРОЕКТОРОВ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДА НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

Пусть алгебра фон Неймана M действует в гильбертовом пространстве H. Через M^+ и M^{pr} обозначим ее положительную часть и решетку проекторов соответственно. Пусть M_*^+ — конус положительных нормальных функционалов на M, e — единица M, $s_r(x)$ — носитель элемента $x \in M^+$. *Весом* на M называется отображение $\varphi : M^+ \to [0, +\infty]$, такое, что

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\ \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x),\ x,y \in M^+,\ \lambda\geqslant 0,\ 0\cdot\infty\equiv 0.$$

Вес φ на M называется *нормальным*, если $\varphi(x) = \sup\varphi(x_i)$, $x_i \nearrow x$, $x_i, x \in M^+$; *конечным*, если $\varphi(e) < +\infty$; *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$, $x \in M$. Вес φ корректно продолжается по линейности до функционала на $M_\varphi = Lin\{x \in M^+ : \varphi(x) < + +\infty\}$.

Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на M.

Вес φ на алгебре фон Неймана M является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(x^{1/2}px^{1/2}) = \varphi(pxp)$ для всех $x \in M^+$ и $p \in M^{pr}$ ([1], [2]). В частности, φ — след, если $\varphi(x^{1/2}yx^{1/2}) = \varphi(y^{1/2}xy^{1/2})$ для всех $x, y \in M^+$.

Теорема 1 ([1], [2]). *Пусть вес φ на алгебре фон Неймана M удовлетворяет условию*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,\ x_n \nearrow x \implies \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n), \quad x_n,\ x \in M^+. \quad (1)$$

Тогда φ *— след* $\Longleftrightarrow$ $\varphi(pqp) = \varphi(qpq)$ *для всех* $p, \ q \in M^{pr}$.

Теорема 1 нашла приложения в теории расщепляющих подпространств [3]. Полунепрерывные снизу по норме веса удовлетворяют условию (1); таковы, в частности, нормальные или конечные веса. Для $p, \ q \in M^{pr}$ три равенства $pqp = qpq$, $s_r(pqp) = s_r(qpq)$ и $pq = qp$ эквивалентны [4].

Теорема 2. *Вес* φ *на алгебре фон Неймана* M *является следом* $\Longleftrightarrow$ $\varphi((pqr)^*(pqr)) = \varphi((pqr)(pqr)^*)$ *для всех* $p, \ q, \ r \in \in M^{pr}$.

Теорема 3. Функционал $\varphi \in M_*^+$ является следом $\Longleftrightarrow$ $\varphi(s_r(pqp)) = \varphi(s_r(qpq))$ для всех $p, \ q \in M^{pr}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикчентаев А. М. *Характеризация следов в некоторых классах весов на алгебре фон Неймана* // Теория функций и ее приложения. – Казань: Изд-во Казан. фонд "Матем.", 1995. – С. 8–9.

2. Бикчентаев А. М. *Об одном свойстве* L_p*-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 2. – С. 185–190.

3. Sherstnev A. N., Turilova E. A. *Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra* // Russ. J. Math. Phys. – 1999. – V. 6. – No 4. – P. 426–434.

4. Бикчентаев А. М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в* C^**-алгебрах* // Матем. сборник. – 2008. – Т. 199. – № 4. – С. 3–20.